

**PRIMER PRETORNEO 2008  
JUVENIL**

1. En las casillas de un tablero de  $8 \times 8$  se colocan fichas blancas y negras, con a lo más una ficha por casilla. Determinar el máximo número de fichas que se pueden colocar de modo que una vez colocado ese número de fichas, en cada fila y cada columna el número de fichas blancas sea el doble del de fichas negras.

4 PUNTOS

2. En un triángulo  $ABC$  sea  $D$  el punto medio del lado  $BC$ , y  $E, F$  puntos de los lados  $CA, AB$  o sus prolongaciones tales que  $BE$  es perpendicular a  $CA$  y  $CF$  es perpendicular a  $AB$ . Mostrar un triángulo  $ABC$  que no sea equilátero y tal que el triángulo  $DEF$  sea equilátero.

5 PUNTOS

3. En cada casilla de un tablero de  $29 \times 29$  se escribió un número entero del 1 al 29, de modo que cada entero figura en exactamente 29 casillas. Consideramos la diagonal con 29 casillas que va desde la esquina superior izquierda del tablero hasta la esquina inferior derecha. La suma de todos los números colocados en todas las casillas del tablero que están más arriba que esta diagonal es igual al triple de la suma de todos los números colocados en todas las casillas del tablero que están más abajo que esta diagonal. Determinar cual es el número escrito en la casilla central del tablero. (Los número de la diagonal no se suman.)

5 PUNTOS

4. Hay 5 tarjetas numeradas de 1 a 5. Un voluntario del público elige 2 tarjetas y se las guarda en el bolsillo. El asistente del mago elige 2 de las tarjetas que quedan y se las da a otro voluntario del público para que se las muestre al mago, que se encuentra en otra habitación. El asistente no puede controlar el orden en el que el segundo voluntario le va a mostrar las dos tarjetas al mago. Dar un procedimiento mediante el cual el mago, que está de acuerdo con su asistente, podrá deducir con certeza las dos tarjetas que sacó el primer voluntario del público. Explicar porqué el procedimiento es infalible.

5 PUNTOS

## PRIMER PRETORNEO 2008 MAYOR

1. Inicialmente hay 3 números en el pizarrón: 1,  $x$ ,  $y$ , donde  $x$  e  $y$  son positivos pero no son enteros. En cada operación permitida se escribe otro número en el pizarrón, pero sin borrar los que ya están. Las operaciones permitidas son:

- elegir dos números del pizarrón, no necesariamente distintos, y escribir su suma o su resta;
- elegir un número del pizarrón y escribir su inverso multiplicativo.

a) Dar una secuencia de operaciones permitidas para lograr escribir  $x^2$  ( $x$  al cuadrado).

2 PUNTOS

b) Dar una secuencia de operaciones permitidas para lograr escribir  $xy$  ( $x$  por  $y$ ).

2 PUNTOS

2. Dado un segmento  $AB$  y una recta  $r$ , paralela al segmento, dar un procedimiento para construir un punto  $C$  de  $r$  tal que el producto  $AC \cdot BC$  sea mínimo, utilizando exclusivamente regla y compás. (Tener en cuenta las distintas separaciones posibles entre el segmento y la recta.)

5 PUNTOS

3. Hay 29 tarjetas numeradas de 1 a 29. Un voluntario del público elige 2 tarjetas y se las guarda en el bolsillo. El asistente del mago elige 2 de las 27 tarjetas que quedan y se las da a otro voluntario del público para que se las muestre al mago, que se encuentra en otra habitación. El asistente no puede controlar el orden en el que el segundo voluntario le va a mostrar las dos tarjetas al mago. Dar un procedimiento mediante el cual el mago, que está de acuerdo con su asistente, podrá deducir con certeza las dos tarjetas que sacó el primer voluntario del público. Explicar porqué el procedimiento es infalible.

5 PUNTOS

4. Dividir un cuadrado de lado 1 en tres rectángulos (no necesariamente iguales) todos con diagonales menores que 1,01.

5 PUNTOS